

PEMBUATAN APLIKASI PEMBELAJARAN PENCARIAN AKAR PERSAMAAN

Amanda A. Diadema¹
amandazalia@gmail.com

R. Gunawan Santosa²
gunawan@ukdw.ac.id

Nugroho Agus Haryono³
cnuq@ukdw.ac.id

Abstract

In numerical methods, finding the root of an equation involves iterations to find an estimated root approximating the original root. Several methods that can be used to find the root are Fixed-Point Iteration Method, Newton-Raphson Method, Secant Method and the Muller Method.

This learning software is developed to provide a learning media for students to learn how to find the root of an equation. It contains animated explanation of the study material, case study and exercises. The software then tested to users using Usability Test, namely compatibility, consistency, flexibility, learnability, perceptual limitation, and minimal action.

Tests performed to undergraduate students who have learned how to find equation root yield these results: Compatibility 86.13%, Consistency 83.73%, Flexibility 84.23%, Learnability 81.87%, Minimal Action 84.80%, and Perceptual Limitation 85.07%. On the other hand, tests performed to undergraduate students who have never learned how to find equation root yield these results: Compatibility 85.33%, Consistency 86.67%, Flexibility 83.47%, Learnability 85.87%, Minimal Action 87.20%, and Perceptual Limitation 82.67%.

Keywords: Numerical Methods, Finding The Root of Equation, Usability Test Method.

1. Pendahuluan

Media pembelajaran merupakan alat bantu untuk menyampaikan informasi atau materi dalam proses belajar. Aplikasi pembelajaran mengenai pencarian akar suatu persamaan merupakan salah satu pengembangan bentuk pembelajaran yang dapat memvisualisasikan beberapa metode pencarian akar persamaan yang ada dalam Metode Numerik, yaitu Metode Iterasi Titik Tetap, Metode Newton-Raphson, Metode Secant dan Metode Muller. Dalam tulisan ini disajikan hasil pembuatan aplikasi pembelajaran pencarian akar persamaan. Untuk mengukur seberapa manfaat aplikasi pembelajaran ini digunakan metode *Usability Test*.

2. Beberapa Metode untuk Pencarian Akar Persamaan.

Akar persamaan adalah nilai-nilai yang memenuhi suatu persamaan. Pencarian akar persamaan $f(x) = 0$ dapat dilakukan secara analitik maupun dengan menggunakan pendekatan numeris. Pencarian akar persamaan secara analitik dapat dilakukan dengan menggunakan kaidah-kaidah matematika secara terstruktur. Sedangkan pencarian akar persamaan menggunakan pendekatan numeris dapat dilakukan dengan menggunakan perhitungan iterasi. Berikut ini diberikan beberapa metode dalam pencarian akar persamaan menggunakan pendekatan numeris.

¹ Teknik Informatika, Fakultas Teknologi Informasi, Universitas Kristen Duta Wacana

² Teknik Informatika, Fakultas Teknologi Informasi, Universitas Kristen Duta Wacana

³ Teknik Informatika, Fakultas Teknologi Informasi, Universitas Kristen Duta Wacana

2.1. Metode Iterasi Titik Tetap

Metode ini menggunakan suatu persamaan untuk memperkirakan nilai akar persamaan. Persamaan tersebut dikembangkan dari fungsi $f(x) = 0$, sehingga parameter x berada pada sisi kiri dari persamaan, yaitu:

$$f(x) = 0 \rightarrow x = g(x) \quad [1]$$

Perubahan posisi persamaan dapat dilakukan dengan menambahkan parameter x pada kedua sisi dari persamaan aslinya. Sebagai contoh, diberikan persamaan berikut:

$$x^2 - 2x + 3 = 0, \text{ dapat ditulis menjadi bentuk } x = \frac{x^2 + 3}{2}$$

Dengan memberi nilai perkiraan awal dari akar x_i dapat dihitung perkiraan baru x_{i+1} dengan rumus iteratif berikut:

$$x_{i+1} = g(x_i) \quad [2]$$

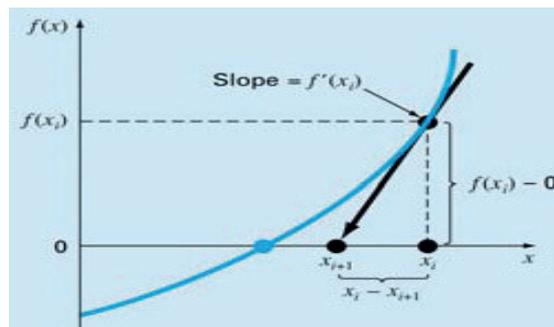
Untuk menentukan galat aproksimasi iteratif dapat dihitung dengan rumus berikut:

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \times 100\%$$

2.2. Metode Newton-Raphson

Metode Newton-Raphson banyak dipakai dalam terapan sains dan rekayasa karena konvergensinya paling cepat di antara metode lainnya (Munir, 2010). Prosedur iterasi metode ini memerlukan satu nilai perkiraan awal dan perhitungan turunan fungsi $f(x)$ sehingga cocok untuk fungsi-fungsi yang dapat dievaluasi secara analitis.

Seperti pada Gambar 1 perkiraan awal dari akar adalah x_i , suatu garis singgung dapat dibuat dari titik $(x_i, f(x_i))$. Titik yang membentuk garis singgung tersebut memotong sumbu x biasanya memberikan perkiraan yang lebih dekat dengan nilai akar.



Gambar 1. Grafik Metode Newton-Raphson

Dikutip dari : Steven C. Chapra & Raymond P. Canale (2002). Numerical Methods for Engineers, chapter 6.

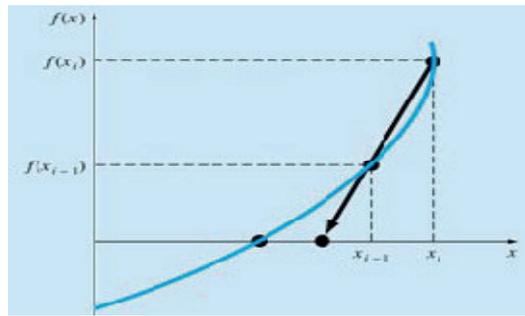
Untuk mencari akar dengan metode Newton-Raphson dapat dihitung dengan rumus berikut.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad [3]$$

2.3. Metode Secant

Metode Secant merupakan variasi dari metode Newton-Raphson untuk fungsi-fungsi yang derivatifnya sulit dievaluasi, karena kekurangan metode Newton-Raphson

adalah diperlukannya turunan pertama dari $f(x)$. Untuk mencari akar dengan metode Newton-Raphson diperlukan dua perkiraan awal dari x , misalnya x_0 dan x_1 .



Gambar 2. Grafik Metode Secant

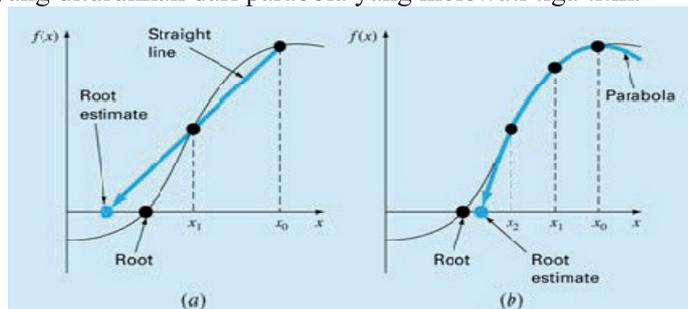
Dikutip dari : Steven C. Chapra & Raymond P. Canale (2002). Numerical Methods for Engineers, chapter 6.

Berikut ini diberikan rumus untuk mencari akar dengan Metode Secant.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)} \quad [4]$$

2.4. Metode Muller

Metode ini termasuk dalam akar persamaan polynomial. Metode ini terdiri dari koefisien-koefisien yang diturunkan dari parabola yang melewati tiga titik.



Gambar 3. Grafik Metode Muller

Dikutip dari : Steven C. Chapra & Raymond P. Canale (2002). Numerical Methods for Engineers, chapter 7.

Koefisien-koefisien tersebut dapat disubstitusikan ke rumus mengisi titik di mana parabola memotong sumbu x , yaitu akar pendekatan, yang dituliskan dalam persamaan

$$f(x) = a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c. \quad [5]$$

Parabola harus memotong tiga titik $[x_0, f(x_0)]$, $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$. Koefisien-koefisien polynomial dapat diestimasi dengan mensubstitusi tiga titik, sehingga

$$f(x) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + c \quad [6]$$

$$f(x) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c \quad [7]$$

$$f(x) = a(x_2 - x_2)^2 + b(x_2 - x_2) + c \quad [8]$$

Dari ketiga persamaan di atas, dapat dicari nilai a , b , dan c . Karena pada ruas kanan pada persamaan ketiga adalah nol, maka secara langsung merupakan penyelesaian untuk $c = f(x_2)$, yaitu :

$$f(x_0) - f(x_2) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) \quad [9]$$

$$f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) \quad [10]$$

Selanjutnya dari kedua persamaan tersebut, dicari nilai a dan b . Dengan langkah-langkah sebagai berikut. Pertama ditentukan dahulu:

$$h_0 = x_1 - x_0 \quad [11]$$

$$h_1 = x_2 - x_1 \quad [12]$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_0 &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ \delta_1 &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \end{aligned} \right\} \quad [13]$$

Kemudian persamaan [13] disubstitusikan ke persamaan [9] dan [10] untuk memberikan:

$$\begin{aligned} (h_0 + h_1)b - (h_0 + h_1)^2 a &= h_0 \delta_0 + h_1 \delta_1 \\ h_1 b - h_1^2 a &= h_1 \delta_1 \end{aligned}$$

sehingga didapatkan nilai a dan b , yaitu :

$$a = \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 + h_0} \quad [14]$$

$$b = ah_1 + \delta_1 \quad [15]$$

$$c = f(x_2) \quad [16]$$

Untuk menemukan akar-akar dapat menggunakan bentuk alternatif formula kuadrat, yaitu:

$$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} \quad [17]$$

Karena bagian kiri mempresentasikan ulang perbedaan antara adanya (x_3) dan pengulangan (x_2) taksiran akar, maka kesalahan/ galatnya adalah:

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| \times 100\%$$

Setelah nilai dai x_3 didapatkan beserta galat yang kecil, maka iterasi akan berhenti, namun jika galatnya masih terlalu besar, maka iterasi akan diulang sampai ditemukan galat yang diinginkan. Proses dapat diulangi sesuai dengan petunjuk berikut ini:

1. Jika x_3 yang ditemukan adalah akar riil, maka dipilih titik asli yang terdekat dengan perkiraan akar baru yaitu x_3 .
2. Jika kedua akar yang ditemukan adalah real dan kompleks, maka menggunakan pendekatan beruntun (sekuensial) seperti pada metode secant, x_1 , x_2 , dan x_3 untuk menggantikan x_0 , x_1 , dan x_2 .

3. Metode Usability Test

Prinsip-prinsip yang digunakan untuk mengukur seberapa *usable* atau dapat digunakannya suatu sistem antara lain: *compatibility*, *consistency*, *flexibility*, *learnability*, *minimal action* dan *perceptual limitation* (Lin, Choong, & Salvendy, 1997) .

- a. **Compatibility**. Kompatibilitas mengacu pada suatu fenomena bahwa respon subjek lebih cepat dan lebih akurat dan kinerjanya tidak akan terhambat jika informasi yang ditampilkan dari suatu sistem kompatibel.
- b. **Consistency**. Sistem yang memberikan kepuasan kepada pengguna harus mempertimbangkan dua elemen, yaitu konsistensi internal dan konsistensi eksternal.

Konsistensi internal merupakan konsistensi dalam sebuah sistem, sedangkan konsistensi eksternal merupakan konsistensi diantara berbagai sistem.

- c. **Flexibility.** Antarmuka sistem harus bisa beradaptasi dengan kebutuhan pengguna dan perbedaan tingkat keterampilan dan kemampuan masing-masing pengguna.
- d. **Learnability.** Sistem yang dibangun harus mudah dipelajari oleh pengguna. Sistem yang terorganisasi akan dapat membantu pengguna dalam memahami sistem tersebut.
- e. **Minimal Action.** Sistem yang dibangun harus memberikan efisiensi waktu ketika pengguna menggunakan atau mengoperasikan sistem tersebut.
- f. **Perceptual Limitation.** Sistem memiliki batasan-batasan dalam setiap bagian dan memiliki pengelompokan elemen yang teroganisir. Salah satu contohnya adalah penggunaan warna yang familiar dengan pengguna.

4. Hasil dan Analisis

Aplikasi Pembelajaran Pencarian Akar Persamaan yang dibuat memiliki tiga bagian, yaitu: halaman materi yang menampilkan penjelasan materi beserta contoh soal dan penyelesaiannya, halaman studi kasus untuk memperdalam pemahaman dengan contoh kasus pencarian akar persamaan, dan halaman soal-soal latihan untuk menguji hasil belajar. Aplikasi ini menggunakan program *parser* untuk melakukan operasi perhitungan yang diterapkan pada perhitungan pencarian akar persamaan dalam studi kasus. *Parser* yang digunakan dalam aplikasi yang dibuat diambil dari url: www.flashandmath.com. Yang dibangun oleh **Doug Ensley** dan **Barbara Kaskosz**.

4.1. Halaman Utama Aplikasi Pembelajaran pencarian Akar Persamaan

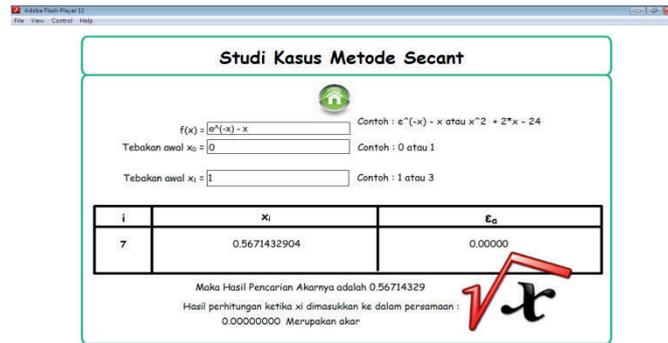
Tampilan halaman awal seperti pada Gambar 4 berisi menu yang terdiri dari Tombol Fungsi dan Persamaan, Metode Numerik, Metode Iterasi Titik Tetap, Metode Newton-Raphson, Metode Muller, Studi Kasus Metode Iterasi Titik Tetap, Studi Kasus Metode Newton-Raphson, Studi Kasus Metode Secant, Studi Kasus Metode Muller dan juga Tombol Soal.



Gambar 4. Halaman Menu

Menu Fungsi dan Persamaan menjelaskan mengenai fungsi, persamaan dan akar persamaan, sedangkan menu Metode Numerik untuk menampilkan materi mengenai dasar-dasar mengenai Metode Numerik yang meliputi pengertian metode numerik dan galat (*error*). Pada Menu Metode Iterasi Titik Tetap, Metode Newton-Raphson, Metode Secant dan Metode Muller menampilkan materi mengenai pencarian akar persamaan menggunakan setiap metode tersebut beserta visualisasi contoh soal dan penyelesaiannya. Pada menu Studi Kasus menampilkan kasus pencarian akar persamaan menggunakan Metode Iterasi Titik Tetap, Metode Newton-Raphson, Metode Secant dan Metode Muller untuk memperdalam materi pencarian akar persamaan. Pada menu Soal menampilkan soal-soal latihan yang dijawab oleh pengguna.

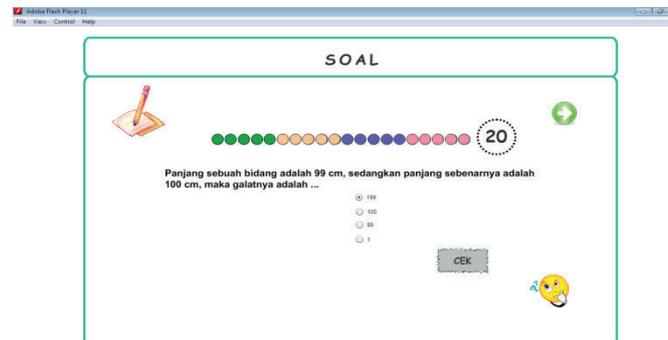
4.2. Halaman Studi Kasus



Gambar 5. Halaman Studi kasus Metode Secant

Gambar 5 menyajikan halaman studi kasus salah satu metode pencarian akar persamaan dalam aplikasi pembelajaran ini. Pada halaman studi kasus Metode Secant tersebut menampilkan perhitungan pencarian akar persamaan menggunakan Metode Secant. Hasil perhitungan tersebut ditampilkan dalam bentuk tabel yang terdiri dari 3 kolom, yaitu kolom i yang menampilkan iterasi akar ke-berapa, x_i yang menampilkan hasil estimasi akar baru dan ϵ_a menampilkan nilai galat (*error*) pada setiap iterasi akar baru. Setelah menemukan hasil pencarian akar (x_i), hasil estimasi akar tersebut (x_i) akan dievaluasi ke dalam persamaan untuk mengetahui apakah hasil pencarian akar tersebut merupakan akar sesungguhnya atau bukan.

4.3. Halaman Soal Latihan



Gambar 6. Halaman Soal Latihan

Pada Gambar 6 merupakan tampilan soal yang harus dijawab oleh pengguna. Terdapat batas waktu dalam pengerjaan soal sehingga pengguna dituntut untuk mengerjakan soal sesuai batas waktu yang ditetapkan. Selain itu, pengguna dapat melihat hasil jawaban pertanyaan dengan menekan tombol “Cek” untuk menampilkan jawaban yang benar atau salah sesuai jawaban pengguna dalam memilih jawaban dari soal-soal yang telah disediakan.

4.4. Hasil Pengujian Menggunakan Usability Test

Untuk mengukur seberapa *usable* sistem Aplikasi Pembelajaran Pencarian Persamaan ini, maka dilakukan uji *usability* dengan menggunakan kuesioner kepada pengguna yang pernah dan belum pernah belajar materi pencarian akar persamaan dalam metode numerik. Uji *usability* tahap I dilakukan untuk mengetahui pendapat dan memperoleh saran atau masukan dari pengguna yang nantinya dilakukan perbaikan pada sistem aplikasi pembelajaran sesuai dengan masukan dari pengguna yang mengisi kuesioner tersebut. Sedangkan uji *usability* tahap II dilakukan setelah dilakukan perbaikan pada sistem aplikasi pembelajaran. Berikut ini adalah tabel hasil *usability test* tahap I dan II:

Tabel 1.

Hasil *Usability Test* Tahap I dan II Kategori Pengguna Belum Pernah dan Pernah Belajar Pencarian Akar Persamaan (Metode Numerik)

Metode <i>Usability Test</i>	<i>Usability Test</i> Tahap I		<i>Usability Test</i> Tahap II	
	Pernah	Belum Pernah	Pernah	Belum Pernah
Compatibility (%)	80.00	79.45	86.13	85.33
Consistency (%)	78.13	81.87	83.73	86.67
Flexibility (%)	82.13	80.80	84.23	83.47
Learnability (%)	79.20	82.40	81.87	85.87
Minimal Action (%)	81.33	81.87	84.80	87.20
Perceptual Limitation (%)	79.73	80.53	85.07	82.67

4.5. Implementasi Pencarian Akar Persamaan Metode Iterasi Titik Tetap, Metode Newton-Raphson dan Metode Muller pada Studi Kasus

Berikut ini adalah implementasi pencarian akar persamaan Metode Iterasi Titik Tetap, Metode Newton-Raphson dan Metode Muller yang diterapkan pada 15 kasus persamaan:

Tabel 2

Implementasi Soal Pencarian Akar Persamaan

No	Soal	Analitik (Akar Sebenarnya)	Iterasi Titik Tetap		Newton-Raphson		Secant		Muller	
			i	Hasil Pencarian Akar	i	Hasil Pencarian Akar	i	Hasil Pencarian Akar	i	Hasil Pencarian Akar
1	$x^3 + 6x - 3$	0.48140560 022084	5	0.48140906 9207144	3	0.4814059453 994	3	0.4814816 5402326	3	0.4814960 4181172
2	$x^3 + 2x^2 + 10x - 20$	1.36880810 782137	14	1.36880377 314363	3	1.3688081886 1753	4	1.3688074 5972192	3	1.3688080 3689243
3	$x^4 - 8x^3 - 36x^2 + 462x - 1010$	3.88094675 6062	33	3.88099846 5296	3	3.8809467502 8894	4	3.8809473 5046372	3	3.8809462 6465305
4	$x^3 - 2x^2 - 5x + 3$	0.51996937 206279	7	0.51993881 878502	4	0.5199693721 28637	4	0.5199693 2711355	4	0.5199694 0725835
5	$9.34 - 21.97x + 16.3x^2 - 3.704x^3$	0.95350320 719742	46	0.95396544 509009	4	0.9535031978 18223	5	0.9534792 7427066	3	0.9535729 5931778
6	$x^5 - 6x^4 + x^3 - 7x^2 - 7x + 12$	0.81128192 445692	41	0.81120617 36067414	3	0.8112822170 214277	4	0.8112817 8540091	3	0.8113149 1099198
7	$x^3 - 0.5x^2 + 4x - 2$	0.5	6	0.50000004 76468318	4	0.5000000000 001456	4	0.4999998 0690973	4	0.5000001 7930012
8	$x^2 + 2x - 24$	4	18	3.99924823 48697753	3	4.0015243902 43903	3	3.9908256 8807339	2	4
9	$x^3 - 4x^2 - 10$									

Tabel 2 (Lanjutan)
Implementasi Soal Pencarian Akar Persamaan

		4.49493967 126359	17	4.49425658 7454562	4	4.4949537827 287225	4	4.4949357 067496	3	4.4947884 041406
10	$e^{(-x)} - x$	0.56714329 040978	9	0.57114311 5080177	4	0.5671432859 89123	4	0.5671703 5841974	4	0.5671562 149698
11	$e^x - 5x^2$	0.60526712 13146	6	0.60561883 89588387	4	0.6052671221 098208	5	0.6052686 2870316	3	0.6052794 8169676
12	$e^x - 10x^2$	0.38296577 268409	8	0.38299316 9266113	7	0.3829657726 84091	5	0.3829799 8806177	4	0.3829669 2370741
13	$x^2 - \sin(x)$	0.87672621 539506	6	0.87697544 72475638	3	0.8767262984 818225	4	0.8768696 6966076	3	0.8767262 5565113
14	$\frac{\sin(x) - x^2}{4}$	2.19367348 52898	6	2.19367557 62879283	3	2.1937154300 73018	4	2.1937395 067617	3	2.1936634 291547
15	$\frac{\sin(x) - 5x}{+2}$	0.49500768 22856	7	0.49500477 4959445	3	0.4950091271 19054	4	0.4950285 8671613	3	0.4950077 1437767

Keterangan

- i = banyak iterasi
- Hasil akar persamaan yang dicetak tebal merupakan hasil pencarian akar yang terdekat dengan akar sebenarnya.

5. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pengujian *usability* tahap I dan pengujian *usability* tahap II kategori mahasiswa yang pernah dan belum pernah belajar materi pencarian akar persamaan (Metode Numerik) mengalami peningkatan pada tahap II, maka dapat disimpulkan bahwa materi dan antarmuka aplikasi pembelajaran ini dapat dipahami oleh pengguna yang belum pernah belajar dan pernah belajar materi Pencarian Akar Persamaan

Urutan Metode yang memiliki hasil pencarian akar yang paling banyak mendekati akar sebenarnya adalah : Metode Newton-Raphson, Metode Muler, Metode Secant, Metode Iterasi Titik Tetap. Sedangkan urutan Metode yang membutuhkan iterasi tersedikit dalam mencari akar adalah: Metode Muller, Metode Newton-Raphson, Metode Secant, Metode Iterasi Titik Tetap. Sedangkan Metode yang membutuhkan iterasi terbanyak dalam mencari akar adalah Metode Iterasi Titik Tetap.

Daftar Referensi

- Arsyad, A. (1997). *Media Pembelajaran*. Jakarta: PT. Raja Grafindo Persada.
- Chapra, S. C. & Canale, R. P. (2001). *Numerical Methods for Engineers with Software and Programming Applications* (4th Ed.). MacGraw-Hills, Inc.
- Lin, H. X., Choong, Y. and Salvendy, G. (1997). A proposed index of usability: a method for comparing the relative usability of different software systems. *Behaviour & Information Technology*. 16:267-278.
- Ensley, D. & Kaskosz, B. (2009). *Flash and Math Applets*. Diakses pada 20 Maret 2012 dari www.flashandmath.com
- Galitz, W. O. (2002). *The Essential Guide to User Interface Design*. Indianapolis, Indiana: Wiley Publishing, Inc.
- Markaban. (2004). *Fungsi, Persamaan dan Pertidaksamaan*. Departemen Pendidikan Nasional Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar Dan Menengah Pusat Pengembangan Penataran Guru (PPP-G) Matematika. Yogyakarta.
- Munir, R. (2010). *Metode Numerik*. Bandung: Penerbit Informatika
- Preece, J., Rogers, Y., & Sharp, H. (2002). *Beyond Human-Computer Interaction*. John Wiley & Sons, Inc.
- Rao, S. S. (2002). *Applied Numerical Methods for Engineers and Scientists*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- Surbakti, S. A. (2011). *Penerapan Metode Usability Testing pada Visualisasi Pembelajaran Protokol Spanning Tree* (Unpublished Skripsi Sarjana S1). Universitas Kristen Duta Wacana, Yogyakarta.
- Triatmodjo, B. (1992). *Metode Numerik*. Yogyakarta: Beta Offset.
- Zulkaryanto, E. (2010). *Implementasi Pola Desain MODEL-VIEW-VIEWMODEL*. Diakses 29 Oktober 2011 dari <http://zulkaryanto.files.wordpress.com>